Riflessioni su certi dannosi modi di stravolgere l'apprendimento della matematica

Reflections on certain harmful ways of distorting the learning of mathematics

Reflexiones sobre ciertas formas nocivas de distorsionar el aprendizaje de la matemática[1]

Bruno D'Amore[1,2] e Martha Isabel Fandiño Pinilla[2]

[1] *DIE Doctorado Interinstitucional en Educación, Énfasis Matemática, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.*

[2] *NRD Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica, Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Italia.*

Sunto. *In Didattica della Matematica si è evidenziato da decenni il problema dello scivolamento metadidattico (glissement metadidactique) evidenziato da Guy Brousseau. Ma la pratica didattica scolare propone modelli di comportamento (insegnamento-apprendimento della Matematica) dai quali si evince che il tema è del tutto sconosciuto. In questo articolo si presenta il problema e si danno vari esempi negativi della sua influenza, soprattutto per quanto riguarda l'ingenua interpretazione della cosiddetta euristica di Polya relativa alla risoluzione dei problemi di Matematica.*

Parole chiave: scivolamento metadidattico, contratto didattico, teoria ingenua degli insiemi, scrittura posizionale dei numeri, risoluzione dei problemi.

Abstract. *In Mathematics Education, the problem of metadidactic slippage (glissement metadidactique) has been highlighted for decades by Guy Brousseau. But school teaching practice proposes patterns of behavior (teaching-learning of Mathematics) from which it is evident that the theme is completely unknown. In this paper we present the problem and gives several negative examples of its influence, especially with regard to the naive interpretation of Polya's so-called heuristics related to the problem solving in Mathematics.*

Keywords: metadidactic slippage, didactical contract, naive set theory, positional number writing, problem solving.

Resumen. *En Didáctica de la Matemática, el problema del deslizamiento metadidáctico (glissement metadidactique) puesto de manifiesto por Guy Brousseau*

---

[1] Articolo invitato/ Invited article/artículo invitado.

se ha destacado durante décadas. Pero la práctica didáctica escolar propone modelos de comportamiento (enseñanza-aprendizaje de la Matemática) de los cuales parece que se desconoce por completo la cuestión. En este artículo se presenta el problema y se dan varios ejemplos negativos de su influencia, especialmente en lo que tiene que ver con la interpretación ingenua de la llamada heurística de Polya relativa a la resolución de problemas de Matemática.

Palabras clave: deslizamiento metadidáctico, contrato educativo, teoría ingenua de conjuntos, escritura posicional de números, resolución de problemas.

1. La risoluzione dei problemi di matematica

La produzione non scientifica ma divulgativa del grande matematico ungherese-statunitense George Polya (1887 – 1985) si è sviluppata fra il 1945 e il 1967; si tratta dei due famosi libri tradotti in molte lingue: 1. *How to Solve It*; 2. *Mathematics of Plausible Reasoning Volume I: Induction and Analogy in Mathematics*; *Mathematics of Plausible Reasoning Volume II: Patterns of Plausible Reasoning*. (Polya, 1945/1967, 1954). In questi libri divulgativi, Polya ha illustrato e reso noto al vasto pubblico il suo modo personale di affrontare e risolvere i problemi, modo davvero geniale, ammirato da tutti quei matematici che hanno apprezzato i suoi eccellenti risultati in probabilità, teoria dei numeri, calcolo combinatorio e nello studio di particolari serie.

Questo tipo di analisi non è unico nel mondo della Matematica, anzi segue per così dire una tradizione per conoscere la quale rinviamo a D'Amore e Fandiño Pinilla (2020).

La narrazione dei metodi di Polya e la confessione pubblica di come egli abbia raggiunto i suoi risultati si sono trasformate, per alcuni lettori dell'epoca, in una specie di "metodologia generale della risoluzione dei problemi", una sorta di "euristica vincente" che, con considerazioni superficiali, è stata spacciata anche come modalità da usare in aula. Le "regole" interne e personali, che Polya enumera e descrive brillantemente e generosamente con esempi, sono state infatti ingenuamente considerate come una sorta di via maestra da seguire nel processo di insegnamento, certi che l'apprendimento sarebbe stata una logica conseguenza.

A quei tempi ancora non si parlava di Didattica della Matematica come disciplina, ancora non era stata creata; cominciò a farlo Guy Brousseau proprio dalla fine degli anni '60, lungo il corso della decade '70, culminando nella creazione di una vera e propria teoria dell'apprendimento matematico a metà degli anni '80.

Ora, che cosa volesse proporre ai suoi lettori Polya era ed è molto chiaro sulla base delle sue stesse parole: proporre sé stesso come modello, visto che si tratta di un modello vincente, e proporre le sue tappe come esempi che chiunque potrebbe seguire.

Oggi, mentre la storia di questi strumenti personali così efficaci nel caso di

Polya sono considerati di grande interesse storico e psicologico, nessuno più oserebbe considerarli scientificamente idonei per studi di Didattica della Matematica da utilizzare in aula, se non coloro che non hanno studiato o hanno mal studiato la Didattica della Matematica. Normalmente questi strumenti di Polya sono osannati o citati con favore da chi non sa che cosa è successo negli ultimi decenni grazie alla Didattica della Matematica e alla ricerca sviluppatasi al suo interno. A costo di ripeterci, dunque, ribadiamo che un’eventuale citazione di Polya da questo punto di vista è interessante dal punto di vista storico e forse psicologico, ma non certo dal punto di vista didattico, come mostreremo nei prossimi paragrafi.

Prima di affrontare questo argomento specifico, dobbiamo però presentare uno dei temi di ricerca che la disciplina Didattica della Matematica ha affrontato negli ultimi decenni.

2. Il fenomeno dello scivolamento metadidattico

L’uso nella prassi didattica di sistemi euristici eretti a modello che sostituiscono un apprendimento matematico con l’apprendimento di un’analogia il più possibile algoritmica e sequenziale rientra in un fenomeno negativo e controproducente evidenziato dalla ricerca seria in Didattica della Matematica che va sotto il nome di “scivolamento metadidattico”, assai diffuso e pericoloso, eppure talvolta perfino favorito da alcuni insegnanti.

Esso si dà quando si passa dallo studio di un tema matematico T, che dovrebbe costituire oggetto di apprendimento, allo studio degli strumenti che al più potrebbero servire o per illustrare il tema T o per affrontare la risoluzione di un problema relativo a quel tema T, come banale schema e non come reale apprendimento (il che dovrebbe comportare come conseguenza la risoluzione corretta, appropriata, generale di problemi concernenti quel tema T). Ma se lo scivolamento ha successo, lo studente impara a comportarsi per analogia nei casi previsti da T, non ad apprendere consapevolmente T. Lo studente apprende uno schema, un algoritmo, un esempio generalizzato, non il tema T. Spesso, poi, alcuni insegnanti (quando sono disinformati in Didattica della Matematica) confondono questi due livelli, accettano in buona fede la situazione che appare superficialmente come positiva, anzi loro stessi la creano e la propongono in aula, confortati dai suggerimenti di “esperti”, e dunque il gioco è fatto: tutti sono soddisfatti. Ma il tema matematico T resta per lo studente un mistero.

Per far capire bene la questione, suggeriamo alcuni esempi scelti fra i più diffusi.

1. Consideriamo problemi molto diffusi nelle scuole di tutto il mondo del tipo: *Tre operai fanno un certo lavoro in 9 ore; se gli operai al lavoro sono 6, quante ore occorreranno per fare lo stesso lavoro?* Si tratta una proporzione con un termine incognito, $a : b = c : d$.

Per capire e dunque risolvere consapevolmente questo tipo di problemi è stato ideato da tempo immemorabile un meccanismo grafico noto in tutto il mondo come “regola del 3”. Tale modello trasforma la formulazione aritmetica in un grafico a frecce e questo sembra rendere più efficace la risoluzione del problema. Solo che, come è successo e succede in tutti i Paesi, dopo un po’ non si parla più del problema e del tema proporzioni, ma del grafico. Apprendere a usare la regola del 3 sostituisce quello che era all’origine il vero oggetto dell’apprendimento: conoscere e saper usare l’oggetto matematico “proporzione”. Lo studente impara a trattare e usare questo grafico (con frecce che hanno tra loro versi concordi e discordi) e, se anche gli riesce di trovare il risultato di quel problema proposto, non impara a risolvere il problema o problemi analoghi perché non ha imparato l’idea di proporzionalità. Ha solo azzeccato il modo giusto di mettere le frecce. Se dimentica la regola del 3 o se sbaglia a mettere le frecce, non sa più risolvere quel tipo di problemi: non ragiona più, cerca la regola, l’algoritmo. Tanto è vero che, se invece di modificare c si modifica d, lo studente non sa più che cosa fare.

2. Altro esempio funesto si è avuto con l’avvento nelle aule della teoria ingenua degli insiemi negli anni ’70 e ’80, per un’idea sovrastimata di alcuni matematici di un certo prestigio, in buona fede, ma che poco avevano a che fare con i problemi di insegnamento-apprendimento. Dopo qualche anno, si è inserito nel mondo della scuola il problema della rappresentazione degli oggetti della teoria degli insiemi e dunque si sono introdotti circoli o ellissi per indicarli; di lì a poco, si è smesso di studiare la teoria degli insiemi, e si è cominciato a teorizzare su come disegnare e usare i grafici, essendo questo diventato il tema. Per cui gli studenti che apprendevano qualcosa, non apprendevano la logica come linguaggio di base della matematica, il che era lo scopo iniziale, apprendevano a dominare i disegni dei grafici. Altro scivolamento metadidattico. Meno male che il pasticcio che è seguito a tutto ciò è servito a far fuori questo inutile contenuto matematico, anche grazie a interventi di altri matematici di identico prestigio (tutto ciò è narrato con particolari in D’Amore, 1999).

3. La scrittura posizionale dei numerali rappresenta una trappola mortale per gli aspetti cognitivi, soprattutto a causa dello scivolamento metadidattico. Se Natalia possiede 123 palline, nessuno mette in dubbio che ella disponga di 123 unità, dove ogni unità è una pallina. Dunque, nel numerale 123 ci sono 123 unità. Sembra ovvio. Ma se Natalia decide di raggruppare (per suoi scopi personali) le palline a dieci a dieci in scatolette, ella avrà 12 scatolette ciascuna contenente una decina di palline, più 3 palline sciolte. Dunque Natalia dispone di 12 decine e 3 unità; il che significa che continua pur sempre a disporre di 123 palline-unità. Ora Natalia decide (sempre per suoi scopi personali) di raggruppare le scatoline-decine in una scatola più grande, raccogliendo le decine a dieci a dieci; riuscirà a raccogliere solo 10 decine che

metterà in una scatola che ovviamente conterrà 100 palline, cioè 10 decine, cioè 1 centinaio. (Il nostro *sistema posizionale* di scrittura dei numeri si chiama *decimale* proprio perché si riunisce sempre a dieci a dieci per passare alle raccolte di livello superiore: unità→decine→centinaia→migliaia). Ma 2 di queste scatole-decine resteranno fuori dal contenitore grande. Dunque, a questo punto, Natalia dispone di 1 centinaio di palline, più 2 decine di palline, più 3 palline sciolte. Nessuno mette in dubbio che ella continua a possedere 123 palline, dunque 123 unità; nessuno mette in dubbio che ella continua a possedere 12 decine di palline più 3 palline sciolte. Si dovrebbe dire correttamente che nel numerale 123 le cifre 3, 2, 1 rappresentano i valori che appaiono nei "posti" unità, decine, centinaia del numerale 123: più precisamente 3 indica la cifra che appare nel posto delle unità, 2 indica la cifra che appare nel posto delle decine, 1 indica la cifra che appare nel posto delle centinaia. Sarebbe così semplice. Ma qui lo scivolamento metadidattico scatta quando si pretende di far dire allo studente che nel numerale 123 "ci sono": 1 centinaio (il che è corretto, casualmente), 2 decine (che è falso perché le decine sono 12), 3 unità (che è falso perché le unità sono 123). Invece che dedicarsi allo studio dell'oggetto matematico "scrittura posizionale", ora ci si occupa di questo scivolamento metadidattico e si pretende che gli studenti imparino a dire il falso. Per essere sicuri che l'errore avvenga nella totalità dei casi e che costituisca un pesante fardello, si assegnano colori alle cifre nei singoli posti: le unità vanno colorate in rosso, le decine di giallo, le centinaia di verde (stiamo inventando questo cromatismo errato e deleterio perché non sappiamo esattamente se ci sia già un accordo nazionale su questo punto infausto). E così, invece di spiegare il senso aritmetico corretto dell'oggetto matematico "scrittura posizionale", si finisce con il passare a una scrittura cromatica che obbliga gli studenti a far uso di matite colorate quando scrivono i numeri, di fatto annullando circa 7000 anni di storia e ricerca. Il vantaggio della scrittura posizionale, una delle invenzioni più geniali dell'essere umano nella sua lunga storia, è proprio il fatto che la stessa cifra, a seconda della sua POSIZIONE, ha valore diverso; mentre qui si ribalta tutto in maniera vergognosa, e non si hanno più scritture posizionali ma CROMATICHE. Invece che dire: "sistema posizionale decimale" si dovrebbe dire "sistema cromatico decimale". A volte l'insegnante si rifà all'abaco; ma sull'abaco, nella "scrittura" 123 non appaiono 123 dischetti-unità, ce ne sono in tutto solo 6, ma è la loro disposizione (1 nella colonna delle centinaia, la terza da sinistra; 2 su quella delle decine; 3 su quella delle unità) a dare il valore, non il colore. Dunque l'abaco, che viene eretto a modello, contraddice i risultati nefasti di questo scivolamento metadidattico. Se allo studente si chiede: *Quante decine ci sono nel numero 123?* molti docenti danno per corretta la risposta errata 2 invece che la corretta 12. Anche confortati dal fatto che la cifra 2 è stata scritta in giallo. Il che spiega i risultati assai più che negativi che si registrano nelle risposte delle prove Invalsi.

Non si deve ritenere che gli esempi di scivolamento metadidattico siano presenti solo nelle scuole primarie e secondarie di I grado. Ci limitiamo a proporre solo uno fra i molti esempi che si incontrano nella scuola secondaria di II grado.

4. La cosiddetta regola di Ruffini, ben famosa nei primi due anni di scuola secondaria di II grado. Lo studente sta studiando i polinomi e dovrebbe saper eseguire la facile divisione $(2x^3 - x^2 - 5x - 2) : (x - 2)$ il che lo dovrebbe portare al quoziente $2x^2 + 3x + 1$. Questo tema costituisce un ottimo argomento del sapere matematico. Ma nessuno gli insegna come fare a eseguire la divisione, peraltro semplicissima. Gli si insegna invece uno schema formato da tutti i coefficienti in gioco che vanno messi in una particolare tabella in un determinato ordine. L'apprendimento non è più quello relativo alla divisione fra polinomi, ma è diventato come sistemare i coefficienti in questa tabella e che uso farne. È questo meccanismo che sostituisce l'apprendimento, quel che libri e docenti si aspettano da lui, un evidente scivolamento metadidattico a causa del quale si perde un significativo sapere che sarebbe importante possedere.

Ci fermiamo qui, ma si potrebbe proseguire a lungo in ogni dominio della Matematica e a tutti i livelli scolastici.

3. Un esempio di metascivolamento metadidattico: l'euristica di Polya interpretata come metodo scolastico

Abbiamo identificato fenomeni di questo tipo come *scivolamento metadidattico* (dal francese *glissement metadidactique*) (Brousseau & D'Amore, 2018).

Questi fenomeni normalmente compaiono dopo una sconfitta, dopo un fallimento didattico, generalmente inevitabile, ma il fatto non viene immediatamente riconosciuto come fallimento mediante i mezzi che offre l'insegnamento tradizionale. Gli insegnanti spiegano, dopo di che spiegano le spiegazioni, poi le illustrano e poi spiegano le illustrazioni ... Ogni volta i tentativi di correggere i fallimenti iniziali sono inadeguati. Il fenomeno si amplifica sempre più e diventa rapidamente incontrollabile, come abbiamo visto negli esempi precedenti.

L' "euristica di Polya" e l'insegnamento dei suoi presunti "metodi" (di tipo pseudo-algoritmico) di problem solving sono un altro pericoloso esempio di scivolamento metadidattico che alcuni insegnanti non riescono nemmeno a riconoscere. Le difficoltà ben note che gli studenti incontrano nel risolvere i problemi generalmente lasciano spesso alcuni insegnanti disarmati. Lo studente possiede una "sua" conoscenza, e tuttavia non trova i mezzi per usarla al momento di dover risolvere i problemi che l'insegnante propone. Una classica risposta ingenua a livello primario è quella di spingere a risolvere problemi simili in modo tale che lo studente possa poi riprodurre la soluzione insegnata in un caso simile. E questo assomiglia a ciò che Polya propone nella sua euristica; ma senza colpa, non voleva proporre una metodologia didattica, voleva solo mostrare il suo modo di agire personale e suggerirlo a chiunque volesse copiare la sua modalità di ricerca.

Lo studente non ha ovviamente bisogno di sapere se la sua risposta è adeguata o perché; è sufficiente che questa risposta sia conforme al modello previsto dal suo insegnante. Lo studente può quindi rispondere nell’ambito del contratto didattico senza nemmeno capire perché la sua soluzione sia corretta. Lo studente simula / adotta / usa / propone quindi una risoluzione che potrebbe anche non capire; l’insegnante la accetta e anzi la loda: è quanto basta a tutta la società.

In un modo più concreto, per guidare i suoi lettori, Polya espone consigli neo-cartesiani per l’organizzazione del lavoro di risoluzione dei problemi: comprendere l’affermazione, collegarla con la propria conoscenza, scomporla in fasi più semplici, ... Polya suggerisce di provare a fare dei passi ancora più euristici: cercare somiglianze, un esempio, un controesempio, generalizzare, confrontare, ... Questo lavoro introspettivo e generoso è servito a ingenui didatti come base per un infruttuoso tentativo di insegnare a risolvere i problemi la cui base sta nell’uso di queste euristiche.

È chiaramente uno scivolamento metadidattico: la risoluzione dei problemi (come attività matematica di grande interesse, forse la più genuina) è dimenticata, sostituita da uno studio delle procedure elementari (cartesiane, appunto) per raggiungere tali risoluzioni. Gli esempi forniti sono di natura tale da rassicurare e rendere gli studenti anche meno brillanti competitivi, ma è chiaro che la situazione è cambiata senza cambiare natura: lo studente cerca di applicare la sua euristica, così come ha cercato di applicare la sua conoscenza, e il successo non è per questo più assicurato, a meno che non vengano scelti problemi ad hoc, sulla base di accordi impliciti o espliciti nell’ambito del contratto didattico. Il che è quel che accade: sfilze di cosiddetti “problemi” (che in realtà sono esercizi) tutti identici. L’inganno didattico è fatale. L’unica differenza è che i saperi matematici significativi contengono in sé le loro stesse condizioni di validità, il che non accade nel caso delle euristiche che sono solo conoscenze e non saperi. Trattarli come saperi è un errore epistemologico e didattico.

Lo sforzo personale e generoso di Polya di proporre il suo proprio modo di fare come suggerimento euristico (che non aveva lo scopo di far smettere di imparare, anzi!) si è lentamente trasformato in un percorso pericoloso e controproducente. Il suo suggerimento metodologico resta un bell’esempio storico e personale, ma non è accettabile nel mondo della prassi didattica scolastica, oggi che abbiamo molto imparato dalla ricerca scientifica in Didattica della Matematica.

Comprendiamo che un errore o un fallimento portano la persona coinvolta, docente / studente, a trasferire la propria attenzione dall’attività in corso a uno dei mezzi di controllo o di conoscenza di questa stessa attività. Questo mezzo di controllo non è una vera conoscenza e ancor meno un sapere, è come se fosse una meta-conoscenza: non ho questa tal conoscenza, ma so quel che devo fare, quel che ci si aspetta da me, e dunque tendo a fare ciò.

Per esempio, per eseguire un'attività relativa a un tema di sapere S, colui che vi è impegnato A utilizza un mezzo M che si rileva insufficiente; per porre rimedio a ciò, A non sa di dover accedere a S per impadronirsene, rivolge invece la sua attenzione a M, ignorando S, cercando di migliorare M e trasformarlo in strumento idoneo. A è così entrato senza via di scampo nel processo che costituisce uno scivolamento metadidattico.

Tale scivolamento metadidattico consiste per il docente nel cambiare l'oggetto di insegnamento di un'attività o di una nozione, sostituendolo con uno dei suoi mezzi di controllo o di messa in evidenza. Questo scivolamento si produce, in particolare quando il mezzo è inappropriato o quando il sistema (allievo / docente) non può né abbandonarlo né respingerlo, dato che è stato imposto dal docente stesso o dalla prassi diffusa o dalla istituzione. È una forma di arrendersi al potere del contratto didattico, a qualcuno dei suoi deleteri effetti (D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, & Sarrazy, 2020).

Come ulteriore conseguenza altamente negativa di questa ingenua interpretazione didattica dei suggerimenti di Polya, una ventina di anni fa si diffuse nel mondo occidentale la fallimentare idea di far precedere alla risoluzione di un problema di Matematica la realizzazione di quelli che vennero chiamati "diagrammi di flusso" (che erano poi dei diagrammi a blocchi) ispirati dal recente successo dell'informatica. In questo caso si è visto che per i bambini si rivelava assai più complessa questa stesura che non la risoluzione stessa del problema; il simbolismo schematico, che avrebbe dovuto aiutare, diventava l'oggetto stesso dell'apprendimento e dell'attività di risoluzione, il che costituisce uno "scivolamento metadidattico". Nelle nostre ricerche abbiamo dichiarazioni spontanee di bambini che ammettono di saper risolvere il problema ma di non saper costruire questo strumento (preteso dall'insegnante) il cui senso è per loro misterioso e che dovrebbe aiutarli. Fortunatamente, la violenta lotta dei didatti e il diffuso buon senso degli insegnanti hanno cominciato a far fuori questa infelice prassi che però ancora resiste.

Fra le deleterie e piuttosto deprimenti trasformazioni che l'idea geniale di Polya ha subito, c'è la più diffusa, almeno in Italia: una sequenza "assolutamente efficace" per risolvere qualsiasi tipo di problema; essa consta di una successione di norme concrete comportamentali quasi algoritmiche da seguire attentamente per non fallire:

- leggere attentamente più volte il testo del problema
- fare un circoletto colorato attorno ai dati del problema (che sono numeri)
- leggere più volte la domanda e poi sottolinearla con un colore diverso

- cercare nel testo del problema la "parolina chiave" che indica qual è l'operazione da eseguire fra i dati disponibili (per esempio: "in tutto" vuol dire che devi usare l'addizione, "perde o regala" comporta la sottrazione)
- eseguire l'operazione fra i dati, trovare il risultato di tale operazione
- il risultato trovato è la risposta corretta al problema.

La cosa è talmente scorretta didatticamente da creare imbarazzo al solo pensiero che qualcuno l'abbia davvero così formulata e che circoli nelle nostre scuole; addirittura l'abbiamo vista scritta in grandi cartelloni a disposizione dei bambini in aula.

Il contratto didattico regna sovrano, sembra quasi che si voglia far sì che il bambino sia fallimentare in Matematica e che sappia risolvere solo problemi preconfezionati secondo un cliché stabilito a priori, un accordo preciso fra insegnante e allievi.

Potremmo ora fare infiniti controesempi a questa supposta strategia vincente perché ricavata dalle regole di Polya, ma ci sembrerebbe di offendere l'intelligenza del lettore nel ritenere che egli ne abbia bisogno. E comunque tutto ciò è già stato tema di altri nostri articoli, con esempi vari. Qui ci esimiamo dal farlo.

Può essere interessante per il lettore docente di Matematica di scuola primaria una breve riflessione sui rischi che corre un giovane risolutore di problemi, di fronte a proposte di attività sotto il condizionamento (più generale) del contratto didattico. Ci limiteremo a fare un solo esempio. Per altri esempi, si veda: D'Amore e Fandiño Pinilla (2019).

Il problema del pastore: *Un pastore ha 12 pecore e 6 capre. Quanti anni ha il pastore?*

Questo testo è già stato oggetto di varie analisi da parte nostra (a partire dal divulgativo D'Amore, 1993). Tutti sappiamo che la risposta corale non è quella corretta, auspicabile, del tipo: "Questo problema non ha senso, perché non c'è alcun legame fra la prima parte, la descrizione della situazione, e la seconda, la domanda" (naturalmente detta con parole dei bambini e non con questa frase da adulti), ma un assai più laconico "18". Se i bambini sono stati allenati a dare sempre comunque una risposta numerica a qualsiasi tipo di problema e se, peggio ancora, hanno seguito le "regole euristiche certamente vincenti" da noi descritte poche righe fa, allora non c'è scampo. La risposta sarà certamente sempre "18". (In aula, fuori dell'aula le cose vanno diversamente). Il bambino legge attentamente più volte il testo del problema, fa due circoletti rossi attorno ai due dati numerici del problema (12 e 6), legge più volte la domanda, la sottolinea in verde, cerca nel testo del problema la "parolina chiave" che indica qual è l'operazione da eseguire fra i dati disponibili (nel nostro caso c'è, si tratta di quella congiunzione "e" che suggerisce un'addizione), esegue dunque l'addizione 12 + 6, trova la somma 18 che è, deve essere, non può che essere la risposta corretta al problema, dato che questa condotta euristica (come ha assicurato l'insegnante) è sempre vincente.

Se poi il testo è il seguente: *Un pastore ha 12 pecore e 6 capre. Quanti anni in tutto ha il pastore?* allora i risultati sono, se possibile, ancora più avvilenti. Ma non occorre spiegare il perché.

Fra i tanti studiosi, soprattutto psicologi, che hanno lavorato nella direzione da noi delineata, quella cioè di fornire come modello comportamentale per la risoluzione di un problema da parte di un essere umano, anche di uno studente a scuola, soprattutto su temi matematici, una sequenza più o meno algoritmica, alcuni sono nomi di grande rilievo; ciò che li accomuna, pur nelle molte differenze, è stato il tentativo di trasformare per davvero le varie e complesse fasi che costituiscono tale risoluzione in una sequenza che ritenevano vincente.

Che gli studi sulle proposte analitiche di Polya siano ancora attuali, anche fra gli psicologi, è testimoniato dal lavoro di Carifio (2015); fra le caratteristiche specifiche delle proposte di Polya si sottolineano gli aspetti metacognitivi (pertinenza, prossimità e qualità) che emergono grazie alle attività di mobilitazione, organizzazione, isolamento. Tutto ciò produce sia emozioni positive che negative, ma entrambe sono basi per la risoluzione dei problemi di matematica (difficili, asserisce l'autore).

Nel suo citatissimo lavoro (Schoenfeld, 1992), Alan Schoenfeld presenta una sua personale interpretazione del lavoro di Polya sia dal punto di vista della ricerca matematica, nel quale si evidenza la tendenza a fare del problem solving il focus stesso della matematica, sia dal punto di vista dell'educazione matematica. Schoenfeld parla di "arte del problem solving", anche proponendo una storia di questo atteggiamento.

Alla base della proposta euristica di Polya c'è l'idea che la matematica deve essere considerata come un'attività, più che un processo di deduzione logica, formale; nelle parole di Schoenfeld, Polya ha sostenuto più volte che la matematica è simile alle scienze fisiche il che comporta una forte componente induttiva e di scoperta, assai lontana dalle concezioni formali di molti matematici dell'epoca. Inoltre, per Polya, l'epistemologia matematica e la pedagogia matematica (così viene denominata da Schoenfeld) sono profondamente intrecciate. Se la matematica ha tali connotazioni, anche nelle scuole esse vanno incoraggiate e le conseguenti attività degli studenti devono rispondere a questo modo di vedere. Inoltre, la matematica va concepita come un atto di senso, socialmente costruito e trasmesso socialmente.

Negli anni '80 si è avuto il trionfo di questo modo di pensare, ma, afferma Schoenfeld, una letteratura critica superficiale ha spesso banalizzato lo spirito del lavoro di Polya che, infatti, nella sua opera si rivolge spesso a "persone con raffinatezza matematica" e non a principianti della matematica.

Schoenfeld asserisce che le caratterizzazioni euristiche da parte di Polya a proposito della risoluzione dei problemi erano "descrittive piuttosto che prescrittive”. Ben altro, dunque, rispetto alla creazione di comportamenti standard proposti in modo banale, come abbiamo più volte detto sopra. Per esempio, prendiamo in esame anche solo il considerare le caratterizzazioni che passo passo servono a riconoscere le strategie quando sono state utilizzate in casi precedenti; prove fatte mostrano che le persone coinvolte in prove non avevano affatto familiarità con le strategie precedenti già usate per poterle riusare. Altro punto critico si è rivelato una fase apparentemente semplice come l’esaminare casi speciali all’interno di un processo o riconoscere casi analoghi. Tutto ciò può essere semplice per un professionista della matematica, ma non esserlo affatto per un principiante, come uno studente.

4. Conclusione

Conoscenze e saperi formano una coppia di metaconoscenza con mutue influenze reciproche. Le conoscenze sono i mezzi impliciti per attivare e gestire i saperi. I saperi sono gli strumenti istituzionali e culturali per apprendere le conoscenze, le proprie e quelle altrui. Volerli trattare allo stesso modo, in particolare concepire le conoscenze solo come saperi, costituisce scivolamenti metadidattici permanenti. Ogni conoscenza implicita in un sapere richiede, per funzionare, nuove conoscenze che, una volta fissate, non possono più svolgere il loro ruolo. Ne risultano errori, malintesi, insuccessi che rilanciano richieste impossibili e pratiche inefficaci. In una visione economica, le conoscenze disponibili in aula sono il capitale e gli interessi sono i saperi acquisiti. L’insegnante professionista critico e consapevole deve distinguere ciò che dovrebbe essere detto da ciò che non deve essere detto. Questa arte umana esiste da milioni di anni; ciò implica il gioco sottile e incerto delle conoscenze vive, dubbiose e fugaci con i saperi sicuri e condivisi, il gioco del detto e del non detto.

Prima di pretendere di “migliorarlo” con misure sommarie e drastiche, è meglio quanto meno studiarlo con umiltà.

Riferimenti bibliografici

Brousseau, G. (2008). *Ingegneria didattica ed epistemologia della matematica*. Prefazione di Bruno D’Amore. Bologna: Pitagora.

Brousseau, G., & D’Amore, B. (2018). Los intentos de transformar análisis de carácter metacognitivo en actividad didáctica: De lo empírico a lo didáctico. *Educación Matemática*, *30*(3), 41–54.

Carifio, J (2015). Updating, modernizing, and testing Polya’s theory of [mathematical] problem solving in terms of current cognitive, affective, and information processing theories of learning, emotions, and complex performances. *Journal of Education and Human Development*, *4*(3), 105–117.

D'Amore, B. (1993). Il problema del pastore. *La vita scolastica*, *47*(2), 14–17.

D'Amore, B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Prefazione di Colette Laborde. Bologna: Pitagora.

D'Amore, B. (2014). *Il problema di matematica nella pratica didattica*. Modena: Digital Docet.

D'Amore, B. (2020). *Los problemas de matemática en la práctica didáctica*. Bogotá: Magisterio.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2019). Un effetto del contratto didattico: Immaginare obblighi impliciti (anche in problemi che chiamano in causa situazioni reali concrete). *La matematica e la sua didattica*, *27*(2), 161–196.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2020). Sugli scivolamenti metadidattici: Alcuni esempi. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *43A*(2), 108–136.

Pólya, G. (1967). *Come risolvere i problemi di matematica: Logica ed euristica nel metodo matematico*. Milano: Feltrinelli. (Lavoro originale pubblicato nel 1945).

Pólya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning. Vol. 1: Induction and analogy in mathematics*. *Vol. 2: Patterns of plausible inference.* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334–370). New York, NY: MacMillan.